

$$I = [0,1]$$

20/5/19

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim : x \sim y$ αν $x - y \in \mathbb{Q}$
(Επαληθεύεται ότι είναι σχέση ισοδυναμίας)

$$x \sim x \text{ αφού } x - x = 0 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Επίσης εάν } x \sim y \text{ τότε } y \sim x \text{ αφού } x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

Ατόμηση εάν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε

$$y - x = q_1 \in \mathbb{Q} \text{ και } z - y = q_2 \in \mathbb{Q} \text{ οπότε}$$

$$z - x = z - y + y - x = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$$

Εάν $\sigma(\alpha)$ είναι κλάση ισοδυναμίας και α :

$$\sigma(\alpha) = \{ b \in I : \alpha - b \in \mathbb{Q} \}$$

Για κάθε $\alpha \in I \Rightarrow \alpha \in \sigma(\alpha)$ άρα κάθε κλάση είναι μη κενό σύνολο.

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, επιλέγω από κάθε κλάση ένα μόνο στοιχείο και φτιάχνω ένα σύνολο E (τα στοιχεία που επιλέγω από κάθε κλάση είναι διαφορετικά μεταξύ τους δώδε δύο διαφορετικές κλάσεις δεν έχουν κοινά στοιχεία).

$$\mathbb{Q} \cap [-1,1] \text{ αριθμήσιμο. άρα } \mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_1, q_2, \dots\}$$

και ορίζουμε $A_n = E + q_n, n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε έτσι μια συλλογή $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ~~που καλύπτει~~ $[0,1]$. Η συλλογή αυτή αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα (αποδεικνύει).

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-1,2] \quad (*)$$

Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο κατά τις μεταφορές (δηλ $V(B+x) = V(B)$, B μετρήσιμο

οπότε από (*) έχουμε (υποθέτοντας ότι E μετρήσιμο) :

$$1 = V([0,1]) \leq V\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} V(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} V(E+q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} V(E) \leq \\ \leq V([-1,2]) = 3 \quad (**)$$

τώρα εάν $V(E) = 0$ τότε από (**) έχουμε ότι $1 < 0 < 3$ άτοπο. Εάν $V(E) > 0$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} V(E) = +\infty$ και από (**) άτοπο!

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=0\}$ είναι μηδενικό σύνολο.

Αν.

Εστω $m \in \mathbb{N}$ και ορίσουμε $A_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq m, |y| \leq m, z=0\}$. Εστω $\varepsilon > 0$ και $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8(m+1)^2}\right\}$. Θεωρούμε

$$I = [-m-\delta, m+\delta] \times [-m-\delta, m+\delta] \times [-\delta, \delta] \text{ τότε } A_m \subseteq I \\ \text{επιπλέον } V(I) = (m+\delta - (-m-\delta))(m+\delta - (-m-\delta))(\delta - (-\delta)) = \\ = (2m+2\delta)(2m+2\delta)2\delta = 8(m+\delta)^2 \cdot \delta \leq 8(m+1)^2 \delta < \\ < 8(m+1)^2 \frac{\varepsilon}{8(m+1)^2} = \varepsilon$$

Άρα ισχύουν δια τυχόν $\varepsilon > 0$ επομένως παίρνοντας $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε $V(I) = 0$. Επίσης: αν $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=0\}$ τότε $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ και $\bar{V}(A) \leq V\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} V(A_m) = 0$
Άρα $V(A) = \underline{V}(A) = \bar{V}(A) = 0$

ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A (όπου A μετρήσιμο). Θα λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο σύνολο A αν για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$ το σύνολο $K_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) > \sigma\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

• Το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων στο σύνολο A συμβολ. με $\mathcal{M}(A)$

• Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Τότε $K_{\chi_A}(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \chi_A(x) > \sigma\} = \begin{cases} \emptyset & , \text{εάν } \sigma \geq 1 \\ A & , \text{εάν } 0 \leq \sigma < 1 \\ \mathbb{R}^n & , \text{εάν } \sigma < 0 \end{cases}$

Η χ_A είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το A είναι μετρήσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε η f είναι μετρήσιμη δηλ. $C(A, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(A)$, (A μετρήσιμο)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εφόσον f συνεχής στο A για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$

$K_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) > \sigma\} = f^{-1}(\sigma, +\infty)$ είναι ανοικτό του A

Συνεπώς υπάρχει ανοικτό V του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$K_f(\sigma) = f^{-1}(\sigma, +\infty) = A \cap V$. Αλλά A μετρήσιμο, και V ανοικτό άρα μετρήσιμο, επομένως $K_f(\sigma)$ μετρήσιμο ως κοπή δύο μετρήσιμων συνόλων

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω A μετρήσιμο του $\mathbb{R}^n$, εαν f, g μετρήσιμες στο

A τότε: $f \vee g(x) = \max \{f(x), g(x)\}$

$$f \wedge g(x) = \min \{f(x), g(x)\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

είναι επίσης μετρήσιμες συναρτήσεις στο A .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• $K_{f \vee g}(c) = K_f(c) \cup K_g(c)$ μετρήσιμο ως ένωση μετρ.

• $K_{f \wedge g}(c) = K_f(c) \cap K_g(c)$ μετρήσιμο ως τομή μετρ.

• $K_{f+g}(c) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (K_f(r) \cap K_g(c-r))$ μετρήσιμο ως αριθμητική ένωση μετρήσιμων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. ορίζουμε:

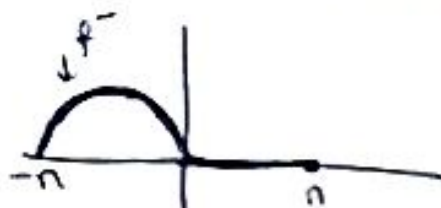
$f^+ = f \vee 0$ Θετικό μέρος της f και

$f^- = (-f) \vee 0$ Θετικό μέρος της f .

π.χ: Εστω $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$ τότε $f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max\{f(x), 0\}$



$$f^-(x) = (-f) \vee 0(x) = \max\{-f(x), 0\}$$



ισχύει ότι

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-$$

και οι f^+ και f^- είναι θετικές ή ίσες με 0.

Λόγω του ότι η συνάρτηση $\max$ είναι μετρήσιμη, και
για μετρήσιμες επεκαί ότι f^+, f^- είναι μετρήσιμες και
 $|f|$ είναι επίσης μετρήσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $f \in M(A)$ τότε για
κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$ τα σύνολα:

$$(1) \{x \in A : f(x) \leq \sigma\}$$

$$(2) \{x \in A : f(x) = \sigma\}$$

$$(3) \{x \in A : f(x) < \sigma\}$$

$$(4) \{x \in A : f(x) \geq \sigma\} \quad \text{είναι επίσης μετρήσιμα σύνολα.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εάν $\sigma \in \mathbb{R}$

$$(1) \{x \in A : f(x) \leq \sigma\} = A \setminus \{x \in A : f(x) > \sigma\} = A \setminus K_f(\sigma)$$

↳ μετρ. εφόσον

$$(2) \{x \in A : f(x) = \sigma\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\{x \in A : f(x) > \sigma - \frac{1}{n}\} \cap \{x \in A : f(x) \leq \sigma + \frac{1}{n}\} \right]$$

≠ μετρ.

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ K_f\left(\sigma - \frac{1}{n}\right) \cap \underbrace{\{x \in A : f(x) \leq \sigma + \frac{1}{n}\}}_{\text{μετρ. λόγω (1)}} \right\}$$

μετρ. λόγω (1)

η κοινή αριθμητ. συνάρτ που είναι μετρήσιμο, είναι μετρήσιμη

$$(3) \{x \in A : f(x) < \sigma\} = \underbrace{\{x \in A : f(x) \leq \sigma\}}_{\text{μετρ. από (1)}} \setminus \underbrace{\{x \in A : f(x) = \sigma\}}_{\text{μετρ. από (2)}}$$

$$(4) \{x \in A : f(x) \geq \sigma\} = \overline{\{x \in A : f(x) < \sigma\}} = A \setminus \{x \in A : f(x) < \sigma\}$$

διαφορὰ μετρ. είναι μετρ.

Εάν $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ τότε

$$K_{af}(b) = \begin{cases} K_f(\frac{b}{a}), & \text{εάν } a > 0 \quad (i) \\ \emptyset, & \text{εάν } a < 0 \text{ και } b \geq 0 \quad (ii) \\ A, & \text{εάν } a < 0 \text{ και } b < 0 \quad (iii) \\ \{x \in A : f(x) < \frac{b}{a}\}, & \text{εάν } a < 0 \quad (iv) \end{cases}$$

Εφόσον f είναι μετρήσιμη τα $K_f(\frac{b}{a})$ και $\{x \in A : f(x) < \frac{b}{a}\}$ είναι μετρήσιμα και $\emptyset, A$ επίσης μετρήσιμα

Αρα $\forall a \in \mathbb{R}$ $K_{af}(b)$ μετρήσιμο, άρα f μετρήσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν A μετρήσιμο και $f, g \in \mathcal{M}(A)$ τότε και οι f^2, fg είναι επίσης μετρήσιμες στο A .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εάν $c \in \mathbb{R}$, $K_{f^2}(c) = \{x \in A : f^2(x) > c\} =$

$$= \begin{cases} A & \text{εάν } c < 0 \\ \{x \in A : f(x) < -\sqrt{c}\} \cup \{x \in A : f(x) > \sqrt{c}\} & \text{εάν } c > 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } K_{f^2}(c) = \begin{cases} A & c < 0 \\ K_{-f}(\sqrt{c}) \cup K_f(\sqrt{c}) & c > 0 \end{cases} = K_{-f}(\sqrt{c}) = K_f(\sqrt{c})$$

άρα μετρήσιμο $\forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow f^2$ μετρήσιμη στο A .

• Επιπλέον $f \cdot g = \frac{1}{2} [\underbrace{(f+g)^2}_{\text{μετρ.}} - \underbrace{(f^2+g^2)}_{\text{μετρ.}}]$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και g, h, G, H όπου (1) $g = \bigvee f_n$ σχεδόν παντού στο A .
 (2) $h = \bigwedge f_n$ σχεδόν παντού στο A . (3) $G = \limsup f_n$ σ.η. στο A
 (4) $H = \liminf f_n$ σ.η. στο A τότε g, h, G, H μετρήσιμες στο A

απόδειξη

ii) Έστω $g = \vee f_n$ σ.η. στο A . τότε $\exists E \subseteq A$ τέτοιο ώστε E μηδενικό και $g(x) = \sup f_n(x)$, $x \in A \setminus E$. Εάν $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K_g(\sigma) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \setminus E : f_n(x) > \sigma\} \cup \underbrace{\{x \in E : g(x) > \sigma\}}_{\text{υποσύνολο του } E} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{f_n}(\sigma) \setminus E \cup \{x \in E : g(x) > \sigma\} \end{aligned}$$

iii) $h(x) = -\sup (-f_n)(x)$ σ.η. στο A .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν (f_n) είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (A μετρήσιμο) και f είναι μια συνάρτηση π.ω.

$f(x) = \lim_n f_n(x)$ σ.η. στο A . τότε η f είναι μετρήσιμη

απόδειξη

Εάν το όριο υπάρχει: $\lim f_n(x) = \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)$ συμφωνά με προηγ. ηφ. $\limsup f_n$ είναι μετρ. άρα $f = \limsup f_n$ είναι μετρήσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω A μετρήσιμο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ημιβουενής τότε f είναι μετρήσιμη.

απόδειξη

Εστω η f είναι κάτω ημιβουενής τότε $\forall \sigma \in \mathbb{R}$
 $K_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) > \sigma\} = f^{-1}(\sigma, +\infty)$ είναι ανοιχτό ε.ω A
άρα υπάρχει ένα ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ε.ω $K_f(\sigma) = G \cap A$
Άλλα G ανοιχτό του $\mathbb{R}^n$ άρα μετρ. και A μετρ.

- Εάν f ανω ημιβουενής τότε $-f$ κάτω ημιβουενής $\Rightarrow$
 $-f$ μετρήσιμη στο $A \Rightarrow f = -(-f)$ μετρ. στο A .

ΘΕΩΡΗΜΑ (Lusin)

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο σύνολο με $V(A) < +\infty$ και $f \in M(A)$
 Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq A$, F κλειστό τέτοιο ώστε
 $V(A \setminus F) < \varepsilon$ και η f να είναι συνεχής στο F .

ΑΣΚΗΣΗ

Εστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι μετρήσιμη:

Εστω $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, f μετρήσιμη αν-ν A μετρήσιμο.

Αλλά $A \subseteq \mathbb{Q}$ και $V(\mathbb{Q}) = 0$ οπότε $\bar{V}(A) \leq V(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow$
 $V(A) = 0$. ~~Αρα~~ f μετρήσιμη.

Σημείωση: f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

ΑΣΚΗΣΗ

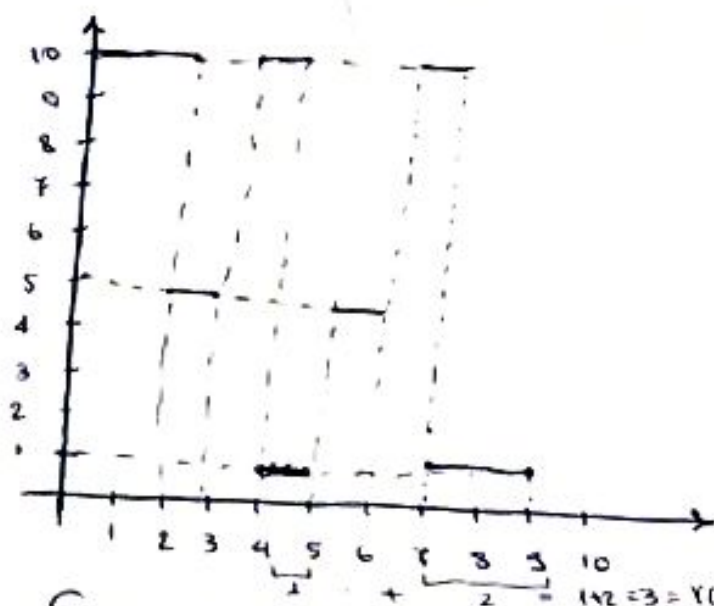
Να εξετάσετε αν η $f(x) = \lceil x \rceil$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη

Αν η f είναι συνεχής ~~στο~~ στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ αρα άνω
 και κάτω ημιβουενής $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Επίσης $\forall y \in \mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow \limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y+} f(x) = y < y = f(y)$$

Αρα η f είναι άνω ημιβουενής στο $\mathbb{R}$ οπότε σύμφωνα
 με όρετική πρόταση είναι και μετρήσιμη.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ LEBESGUE



Το ολοκλήρωμα Riemann της f (που έχει το παραπάνω σχήμα) είναι:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \dots + \int_7^8 f(x) dx = K$$

Εάν ακολουθήσουμε μια άλλη διαδικασία και ορίσουμε $V(I)$ τη χωρική ένταση του διαστήματος I .

Γνωρίζουμε ότι εάν $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, με I_i διαστήματα με $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$ τότε:

$$V(A) = V(I_1) + V(I_2) + \dots + V(I_k)$$

Εστω τώρα: $A_1 = \{x : f(x) = 1\}$

$$A_5 = \{x : f(x) = 5\}$$

$$A_{10} = \{x : f(x) = 10\}$$

τότε $V(A_1) = 3$, $V(A_5) = 2$, $V(A_{10}) = 4$.

τότε έχουμε: $1 \cdot V(A_1) + 5 \cdot V(A_5) + 10 \cdot V(A_{10}) = K$

τα A_i είναι μετὰ τα. Αρα διαμέριση του συνόλου A των προκάλεσε διαμέριση του πεδίου ορισμού.

Ετσι εάν f φραγμένη ορισμένη στο $[a, b]$ με $m \leq f \leq M$

$\forall x \in [a, b]$, διαμερίζουμε $[m, M] : m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$

και ορίζουμε τα εσής σύνολα: $k = 1, 2, \dots, n$

$$A_k = \{x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

(διαμέριση ως προς το σύνολο τιμών)

Αντί η διαμερίση του συνόλου επιφέρει διαμερίση του $[a, b]$: $[a, b] = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ όπου A_k είναι ξένα οντα δύο. Σχηματίζουμε τα αθροίσματα:

$$\sum_k y_k V(A_k) \text{ , ανω αθροισμα}$$

$$\sum_k y_{k-1} V(A_{k-1}) \text{ , κάτω αθροισμα.}$$

Εαν, όταν η λεπτότητα της διαμερίσης τείνει στο 0 αυτά τα αθροίσματα έχουν οριο και είναι ίσα μεταξύ τους (δηλ. οριο πάνω αθροισμάτων, κάτω αθρ. είναι ίσα) τότε η συνάρτηση μπορεί να έχει ολοκλήρωμα υπο προϋποθέσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται απλή εαν υπάρχουν μετρήσιμα συνόλα $A_1, A_2, \dots, A_k$ πεπερασμένου μέτρου, ξένα οντα δύο καθώς επίσης και $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ ώστε η f να έχει μια παράσταση της μορφής:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \chi_{A_i}(x) \quad (*)$$

Ορίζουμε ως ολοκλήρωμα Lebesgue της f να είναι ο πραγματικός αριθμός: $\int f = \sum_{i=1}^n \gamma_i V(A_i)$

$$\text{Εαν } f(x) = \sum_{i=1}^m \delta_i \chi_{B_i}(x) \quad (**)$$

τότε έχουμε:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^m \delta_j \chi_{B_j}(x) \quad \text{και εαω } k > m \text{ τότε}$$

$$\gamma_1 \chi_{A_1} + \dots + \gamma_m \chi_{A_m} + \gamma_{m+1} \chi_{A_{m+1}} + \dots + \gamma_k \chi_{A_k} = \delta_1 \chi_{B_1} + \dots + \delta_m \chi_{B_m} \quad (f_9)$$

Τα $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι διαμερίση του χώρου και το δ_{i0} και τα $B_1, \dots, B_m$. Εάν $A_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A_i \cap B_j \Rightarrow x \in A_i$ και $x \in B_j$ οπότε $x \notin A_\lambda \ \forall \lambda \neq i$ και $x \notin B_\nu, \nu \neq j$ άρα για $x \in A_i \cap B_j$ έχουμε $\gamma_1 \chi_{A_1}(x) + \dots + \gamma_i \chi_{A_i}(x) + \dots + \gamma_k \chi_{A_k}(x) = \delta_1 \chi_{B_1}(x) + \dots + \delta_j \chi_{B_j}(x) + \dots + \delta_m \chi_{B_m}(x) \Rightarrow \gamma_i = \delta_j$

Εάν $A_i \cap B_j \neq \emptyset \quad i=1, \dots, k, \quad j=1, \dots, m$ τότε αυτά είναι ένα ανα δ_{ij} και επίσης ισχύει

$$V(A_i) = \sum_{j=1}^m V(A_i \cap B_j) \quad \text{και}$$

$$V(B_j) = \sum_{i=1}^k V(A_i \cap B_j) \quad \text{οπότε}$$

Ⓐ εάν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$
 $\gamma_i = \delta_j$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \gamma_i V(A_i) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \sum_{j=1}^m V(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_i V(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \gamma_i V(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \delta_j V(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \delta_j \left(\sum_{i=1}^k V(A_i \cap B_j) \right) = \sum_{j=1}^m \delta_j V(B_j) \end{aligned}$$

• Εάν f ανήκει και $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$

• Έντονος το σύνολο των ανήκων συναρτήσεων $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, δηλ. αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $f, g \in \mathcal{S}$ τότε $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$ και ισχύει: $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Ορισμός

Έστω A μετρήσιμο σύνολο $\forall f \in \mathcal{S}$ ορίζουμε $\int_A f = \int f \chi_A$ το οποίο και ονομάζ. ολοκλ. Lebesgue της f στο A

$$\text{Ισχύει} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f = \int f$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $f \in \mathcal{I}$ και $f \geq 0$ και A, B μετρήσιμα σύνολα π.ω.
 $A \subseteq B$ τότε : $\int_A f \leq \int_B f$

απόδ. Εφόσον $A \subseteq B$ $f \chi_A \leq f \chi_B$ συνεπώς $\int_A f = \int f \chi_A \leq \int f \chi_B \leq \int_B f$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $(f_k)_k$ και (h_k) δύο αύξουσες ακολουθίες
μη αρνητικών απλών συναρτήσεων π.ω. για κάποια
 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να ισχύει : $f_k \xrightarrow{ε.σ} g$ και $h_k \xrightarrow{ε.σ} g$ τότε
για κάθε A μετρήσιμο τα όρια $\lim_k \int_A f_k$ και
 $\lim_k \int_A h_k$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}^+$ και είναι ίσα μεταξύ
τους.

Ορίζουμε : $M^+(A) = \{f \in \mathcal{M}(A) \text{ και } f \geq 0\}$

Λήμμα

Εστω $f \in M^+(\mathbb{R}^n)$. τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία
μη αρνητικών απλών συναρτήσεων π.ω.
 $f_k(x) = 0$ εάν $f(x) > k$ και $f_k \xrightarrow{ε.σ} f$.

• Εάν $f \in M^+(A)$ υπάρχει ακολουθία απλών (f_k) αυξ.
 $f_k \xrightarrow{ε.σ} f$ θέσω $\int f = \lim_k \int f_k$

$$f = f^+ - f^-$$